На правах рукописи

Кузьмина Наталья Александровна

ДВОЙСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАРТАНА

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре геометрии ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Столяров Алексей Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Аминова Ася Васильевна
	доктор физико-математических наук, профессор Степанов Сергей Евгеньевич
Ведущая организация:	Тверской государственный университет

Защита состоится 18 июня 2009 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д. 212. 081. 10 при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «__» апреля 2009 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент Липачёв Е. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Постановка вопроса и актуальность темы. Связность является одним из основных понятий дифференциальной геометрии присоединённых расслоенных многообразий.

История теории связностей начинается с работы Т. Леви-Чивита [24] о параллельном перенесении вектора в римановой геометрии. Эта идея была обобщена в различных направлениях, например, в общей теории относительности. В 1950 году В. В. Вагнер [6] и Ш. Эресман [23] независимо друг от друга ввели общее понятие связности в расслоенном пространстве. Г. Ф. Лаптев [9], следуя идеям Э. Картана [8], линейные связности определяет как множества отображений бесконечно близких слоев расслоения, соответствующих касательным векторам базисного многообразия, удовлетворяющие определённым условиям.

А. П. Норденом [12] разработан метод нормализации, позволяющий в касательных расслоениях подмногообразий проективного пространства индуцировать аффинные связности без кручения.

В 1926 г. Э. Картан [19] ввёл понятие «неголономного пространства с фундаментальной группой G».

В работах Г. Ф. Лаптева и Н. М. Остиану [10], [13], [14] получила широкое развитие теория распределений m-мерных линейных и гиперплоскостных элементов в проективном пространстве P_n и пространстве проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$. В случае распределения гиперплоскостных элементов в пространствах со связностью без кручения эта теория нашла своё отражение в работах В. И. Близникаса [4], [5]. Ю. Г. Лумисте [11] изучает распределения на однородных пространствах, названных им пространствами проективного типа.

В работе А. В. Столярова [16], используя данное им определение двойственных пространств с линейной связностью с точки зрения инволютивных преобразований форм их связностей, значительно расширена теория двойственных линейных связностей (аффинных, проективных, нормальных), индуцируемых при различных оснащениях ряда многообразий пространства проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$.

В. Т. Базылевым [1], [2] получена обширная теория многомерных сетей Σ_n, погружённых в n-мерное проективное пространство P_n.

Э. Картан [20], [21] при изучении семейства асимптотических форм многомерных поверхностей проективного пространства P_{2m} выделил класс таких поверхностей V_m, для которых число линейно независимых квадратичных асимптотических форм $\Phi^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{ik}\omega^i_0\omega^k_0$ $(i,k=\overline{1,m};\ \alpha=\overline{m+1,2m})$ на поверхности равно m и поверхность V_m несёт сеть сопряжённых линий.

Чжень Шэн-шэнь [22] показал, что для поверхности Картана V_m можно построить преобразования Лапласа. Этому результату дал значительное обобщение Р. В. Смирнов [15], построив преобразования Лапласа для произвольных p-сопряжённых систем. Поверхность Картана есть частный случай p-сопряжённой системы.

Изучением поверхности Картана также занимались В. Т. Базылев [3], А. В. Столяров [17] и др.

Обобщая понятие поверхности Картана, нами вводится понятие «распределения Картана».

В проективном пространстве P_{2m} рассмотрим распределение M касательных элементов (A_0, Π_m). В репере нулевого порядка система дифференциальных уравнений распределения M имеет вид [10] $\omega_i^\alpha = \Lambda_{iL}^\alpha \omega_0^L$ $(L = \overline{1,2m})$.

Допустим, что: 1) число линейно независимых квадратичных асимптотических форм $\Phi^\alpha = a_{ik}^\alpha \omega_0^i \omega_0^k$, $a_{ik}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{ik}^\alpha + \Lambda_{ki}^\alpha\right)$ на распределении равно m; 2) распределение M несёт m-ткань сопряжённых линий, то есть направления касательных к линиям ткани $\Sigma \subset \mathrm{M}$ попарно сопряжены относительно любого конуса направлений $\Phi^\alpha = 0$.

Такое распределение назовём *распределением Картана* M.

Объектом исследования настоящей работы являются распределение Картана M (главы I и II) и поверхность Картана V_m (глава III) в $2m$-мерном проективном пространстве P_{2m}.

Эти исследования являются актуальными и представляют большой научный интерес, ибо: 1) исследования по изучению двойственной геометрии поверхности Картана V_m в проективном пространстве P_{2m} ранее геометрами не проводились; 2) геометрия распределения Картана M в проективном пространстве P_{2m} до настоящего времени в математической литературе вообще не изучалась.

Цель работы. Целью настоящего диссертационного исследования является построение двойственной геометрии поверхности Картана V_m и распределения Картана M в проективном пространстве P_{2m} на основе широкого привлечения их двойственных образов. Достижение поставленной цели включает в себя решение следующих основных задач:

1) построить основы двойственной геометрии распределения Картана M в проективном пространстве P_{2m} с существенным привлечением ассоциированного с M внутренним образом гиперполосного распределения H в P_{2m};

2) разработать основы теории двойственных линейных связностей (аффинных, проективных и нормальных), индуцируемых при различных классических оснащениях (в смысле А. П. Нордена, Э. Картана) распределения Картана M в проективном пространстве P_{2m}, а также найти пути приложения аффинных связностей к изучению сопряжённой ткани $\Sigma \subset \mathrm{M}$;

3) проводить изучение двойственной геометрии поверхности Картана V_m в проективном пространстве P_{2m} на основе привлечения её двойственного образа.

Методы исследования. В диссертации используются инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований, а именно, метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [9], метод внешних дифференциальных форм Э. Картана [18] и метод нормализации А. П. Нордена [12]. Использование указанных методов позволило ввести в рассмотрение дифференциально-геометрические факты, связанные с дифференциальными окрестностями образующих элементов исследуемых подмногообразий до шестого порядка включительно.

Все исследования в работе проводятся в минимально специализированных системах отнесения, что позволило получить результаты в инвариантной форме. Все рассмотрения проводятся с локальной точки зрения. Встречающиеся функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми, то есть изучаемые подмногообразия достаточно гладкие, а при доказательстве теорем существования – аналитическими. Следует заметить, что результаты по геометрии линейных связностей получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г. Ф. Лаптевым [7], [9].

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертационном исследовании, являются новыми. Научная новизна их обусловлена тем, что двойственная геометрия поверхности Картана V_m и распределения Картана M в проективном пространстве P_{2m} до настоящего времени в математической литературе оставалась практически не изученной.

В диссертации приведены доказательства всех основных предложений, которые сформулированы в виде теорем.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретическое значение. Полученные в ней результаты могут быть использованы при изучении различных многообразий, погружённых в пространства более общей структуры, а также многообразий, несущих сеть (ткань) того или иного класса (типа).

Теория, разработанная в диссертации, может быть использована в качестве материала специальных и факультативных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов по геометрии оснащённых подмногообразий в обобщённых пространствах, а также при написании ими курсовых, дипломных и научных работ.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах по современным проблемам геометрии: на заседаниях научно-исследовательского семинара молодых исследователей при кафедре геометрии Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева (Чебоксары, 2006–2008 гг.); на научных конференциях аспирантов, докторантов и научных сотрудников Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева (Чебоксары, 2006–2008 гг.); на региональной научной конференции «Современные вопросы геометрии и механики деформируемого твёрдого тела» (Чебоксары, 2006 г.); на XV международной конференции «Математика. Образование» (Чебоксары, 2007 г.); на 5-й и 6-й молодёжной научной школе-конференции «Лобачевские чтения», (Казань, 2006–2007 гг.); на заседаниях Казанского городского научно-исследовательского геометрического семинара (Казань, КГУ, 2008–2009 гг.).

Публикации. Основные научные результаты, включённые в диссертационную работу, опубликованы в 14 печатных работах автора.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные научные работы по теме исследования выполнены без соавторов.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика и содержание диссертации), трёх глав и списка литературы, включающего 99 наименований. Полный объём диссертации составляет 129 страниц машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе вводится понятие распределения Картана M в P_{2m}. В разных дифференциальных окрестностях строятся различные поля геометрических объектов на распределении M, найдены их геометрические характеристики (гиперполосное распределение Картана, его двойственный образ, оснащения, поле соприкасающихся гиперквадрик).

В п. 1 §1 по аналогии с поверхностью Картана V_m в P_{2m} вводится понятие *распределения Картана* M в проективном пространстве P_{2m}, приводятся дифференциальные уравнения распределения M, сопряжённой m-ткани $\Sigma \subset \mathrm{M}$ в P_{2m}. Доказано, что: 1) сопряжённая ткань Σ на распределении Картана во второй дифференциальной окрестности внутренним образом определена самим распределением Картана M в P_{2m} (теорема I.1); 2) если распределение Картана M в проективном пространстве P_{2m} голономно, то ткань $\Sigma \subset \mathrm{M}$ голономна (теорема I.2); голономное распределение Картана M в P_{2m} ($m > 2$) является m-сопряжённой системой в смысле Р. В. Смирнова [15].

В п. 2 §1 построены внутренние инвариантные оснащения в смысле А. П. Нордена и Э. Картана голономного и необязательно голономного распределения Картана M в P_{2m}.

В п. 1 §2 показано (теорема I.8), что с распределением Картана M в P_{2m} во второй дифференциальной окрестности инвариантным внутренним образом ассоциируется гиперполосное распределение H в P_{2m}, для которого исходное распределение M является базисным.

Найдены дифференциальные уравнения ассоциированного распределения H и условие его регулярности. Методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [9] построены различные поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов на распределении H в P_{2m}.

Центральным результатом п. 2 §2 является теорема I.10: *ассоциированное регулярное гиперполосное распределение Картана* H *в проективном пространстве* P_{2m} *в четвёртой дифференциальной окрестности индуцирует*: 1) *проективное пространство* $\overline{\mathrm{P}}_{2m}$, *двойственное исходному пространству* P_{2m} *относительно инволютивного преобразования* J *структурных форм Пфаффа*; 2) *многообразие* $\overline{\mathrm{H}}$ *в* $\overline{\mathrm{P}}_{2m}$, *двойственное исходному распределению* H.

Таким образом, двойственность ассоциированного гиперполосного распределения H в P_{2m} влечёт за собой двойственность геометрии исходного распределения Картана M в P_{2m}, являющегося базисным для H.

В пп. 1, 2 §3 строятся различные инвариантные оснащения (в смысле А. П. Нордена, Э. Картана) распределения Картана M в P_{2m} с использованием ассоциированного гиперполосного распределения H. Доказано (теорема I.11), что нормализация одного из регулярных гиперполосных распределений Картана H в P_{2m} и $\overline{\mathrm{H}}$ в $\overline{\mathrm{P}}_{2m}$ равносильна нормализации другого, найдена связь между компонентами полей оснащающих объектов $\{v^i_{2m}, v^0_i\}$ и $\{\bar{v}^i_{2m}, \bar{v}^0_i\}$ подмногообразий H и $\overline{\mathrm{H}}$.

С использованием двойственного образа регулярного гиперполосного распределения H в P_{2m} в четвёртой дифференциальной окрестности построены двойственные инвариантные нормализации [12] распределения Картана M в P_{2m}: нормализации Михэйлеску, Фубини и Вильчинского (теоремы I.12, I.12*, I.13, I.14).

В п. 3 §3 доказано (теорема I.15), что распределение Картана M в P_{2m} в четвёртой дифференциальной окрестности внутренним образом порождает поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик Q^2_{2m-1}. Найдено условие соприкосновения третьего порядка гиперквадрик этого поля с распределением Картана M; этим условием является обращение в нуль тензора Дарбу D^{2m}_{iks}.

Глава II посвящена построению основ теории двойственных линейных связностей (аффинных, проективных, нормальных) на оснащённом распределении Картана M в проективном пространстве P_{2m}.

В §1 второй главы доказано (теорема II.1), что *на нормализованном распределении Картана M в проективном пространстве P_{2m} индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, причём эти связности обобщённо сопряжены относительно поля тензора M^{2m}_{ik} вдоль любой кривой l, принадлежащей распределению Картана. Пространство аффинной связности $\overset{1}{\mathrm{A}}_{2m,m}$ $(\overset{2}{\mathrm{A}}_{2m,m})$ имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда распределение нормалей первого рода $N_m(v)$ (второго рода $N_{m-1}(v)$) является голономным.*

Найдены геометрические характеристики параллельного перенесения допустимого направления в аффинных связностях $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ вдоль любой кривой l, принадлежащей распределению Картана M.

Найдены условия совпадения связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ пространств $\overset{1}{\mathrm{A}}_{2m,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{2m,m}$ (теорема II.2): на распределении Картана M в P_{2m} с полем симметричного тензора M^{2m}_{ik} аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ совпадают тогда и только тогда, когда ассоциированное распределение H является взаимным, нормализация M есть нормализация Михэйлеску и соприкасающиеся гиперквадрики имеют касание третьего порядка с распределением M.

Доказано (§2), что на оснащённом в смысле Э. Картана распределении Картана M в P_{2m} индуцируется первая проективная связность; найден тензор кривизны-кручения соответствующего пространства проективной связности $\overset{1}{\mathrm{P}}_{2m,m}$.

Центральным результатом §3 является теорема II.4: *при оснащении в смысле Э. Картана распределения Картана* M *в* P_{2m} *с полем симметричного тензора* M_{ik}^{2m} *кроме первой проективной связности индуцируются ещё две линейные связности проективного типа*, *причём*: 1) *соответствующие пространства проективной связности* $\overset{1}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ *и* $\overset{2}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ *двойственны тогда и только тогда*, *когда тензор* $D_{iv}^{k}(v)$ *обращается в нуль*; 2) *пространства* $\overset{1}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ *и* $\overset{3}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ *являются двойственными*.

Если пространства $\overset{1}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ являются двойственными, то все три пространства проективной связности $\overset{1}{\mathrm{P}}_{2m,m}$, $\overset{2}{\mathrm{P}}_{2m,m}$, $\overset{3}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ попарно двойственны между собой.

Найдена геометрическая характеристика аналитического условия двойственности пространств $\overset{1}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ (теорема II.5): связности пространств $\overset{1}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ двойственны тогда и только тогда, когда при смещениях центра B_0 распределения Картана M в P_{2m} вдоль любой кривой l, принадлежащей распределению M, смещение оси $N_{m-2}(B_0) \equiv [M_u]$ оснащающей плоскости Картана $\widetilde{N}_{m-1}(B_0) \equiv [M_{2m}, M_u]$ принадлежит характеристике Π_{m-1} оснащающего распределения гиперплоскостных элементов; при этом ось $[M_u]$ совпадает с осью Кёнигса $[K_u]$.

Найдены инвариантные аналитические условия совпадения связностей пространств $\overset{1}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{P}}_{2m,m}$, $\overset{1}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ и $\overset{3}{\mathrm{P}}_{2m,m}$. Доказаны следующие предложения:

– связности пространств $\overset{1}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{P}}_{2m,m}$, индуцируемых при оснащении распределения Картана M в P_{2m} с полем симметричного тензора M_{ik}^{2m}, совпадают тогда и только тогда, когда эти пространства двойственны и тензор b_{iks}^{2m} обращается в нуль (теорема II.6).

– условием совпадения связностей пространств $\overset{1}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ и $\overset{3}{\mathrm{P}}_{2m,m}$ является одновременное обращение в нуль тензоров $b_{iv}^{k}(v)$ и b_{iks}^{2m} (теорема II.7).

В §4 доказано (теорема II.8), что *на распределении Картана* M *в* P_{2m}, *оснащённом в смысле Нордена-Картана*, *в расслоении нормалей первого рода индуцируются пять нормальных связностей* $\overset{\bar{a}}{\nabla}{}^{\perp}$ ($\bar{a} = \overline{0,4}$). *В случае голономного* *или взаимного с полем симметричного тензора* M_{ik}^{2m} *ассоциированного гиперполосного распределения* H *в* P_{2m} *связности* $\overset{3}{\nabla}{}^{\perp}$ *и* $\overset{4}{\nabla}{}^{\perp}$ *совпадают*.

Справедливо предложение: если на оснащённом в смысле Нордена-Картана распределении Картана M в P_{2m} оснащающая плоскость $\widetilde{N}_{m-1}(v)$ неподвижна, то нормальная связность $\overset{\bar{a}}{\nabla}{}^{\perp}$ является плоской тогда и только тогда, когда она полуплоская (теорема II.9).

Найдены условия совпадения нормальных связностей, индуцируемых на оснащённом в смысле Нордена-Картана распределении Картана M в P_{2m} (теоремы II.10, II.11):

– нормальные связности $\overset{3}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ совпадают тогда и только тогда, когда нормализация распределения M является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик;

– нормальные связности $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{4}{\nabla}{}^{\perp}$ вырождаются в одну тогда и только тогда, когда любые две из них совпадают.

В §5 рассмотрены поля плоскостей, являющиеся параллельными в нормальных связностях $\overset{\bar{a}}{\nabla}{}^{\perp}$. Показано, что:

– на оснащённом в смысле Нордена-Картана распределении Картана M в P_{2m} поле характеристик $\Pi_{m-1}(B_0)$ ассоциированного гиперполосного распределения H в P_{2m} является параллельным в каждой нормальной связности $\overset{\bar{a}}{\nabla}{}^{\perp}$;

– поле инвариантных прямых $h \equiv [B_0 N_{2m}]$ является параллельным в нормальной связности $\overset{\bar{a}}{\nabla}{}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда тензор $A^{u}_{2m,k}(v)$ обращается в нуль;

– для распределения Картана M в P_4 в третьей дифференциальной окрестности существует единственная инвариантная внутренним образом определяемая нормализация M, поле инвариантных прямых h которой является параллельным в нормальной связности $\overset{\bar{a}}{\nabla}{}^{\perp}$.

В §6 второй главы найдены приложения двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ пространств $\overset{1}{\mathrm{A}}_{2m,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{2m,m}$ к изучению геометрии вполне сопряжённой ткани на распределении Картана M в P_{2m}. Заметим, что сопряжённая ткань Σ на распределении M называется вполне сопряжённой, если на M фундаментальный тензор M_{ik}^{2m} симметричен.

Доказаны следующие предложения:

– двойственные поля m-мерных и $(m-1)$-мерных гармонических плоскостей на распределении Картана M в P_{2m}, несущем вполне сопряжённую m-ткань Σ, во второй дифференциальной окрестности задают двойственную внутренним образом определённую нормализацию подмногообразия M (теорема II.15);

– поля гармонических плоскостей q^i_{2m} и q^0_i вполне сопряжённой m-ткани $\Sigma \subset \mathrm{M}$ нормализуют распределение Картана M взаимно относительно поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик тогда и только тогда, когда данная ткань есть ткань Дарбу (теорема II.16);

– вполне сопряжённая m-ткань Σ на распределении Картана M в P_{2m} есть ткань с совпавшими псевдофокусами F^j_i (с совпавшими псевдофокальными гиперплоскостями η^j_i) тогда и только тогда, когда относительно поля её гармонических плоскостей q^0_i $\left(q^i_{2m}\right)$ она является геодезической тканью второго (первого) рода (теорема II.17);

– если ассоциированное гиперполосное распределение H в P_{2m} является голономным или взаимным, то исходное распределение Картана M в P_{2m}, на котором вполне сопряжённая m-ткань Σ является чебышевской первого и второго родов (одновременно), имеет соприкосновение третьего порядка с соприкасающимися гиперквадриками тогда и только тогда, когда поля гармонических плоскостей $[\eta_i]$ и $[F_i]$ m-ткани нормализуют подмногообразие M взаимно (теорема II.18).

Глава III диссертации посвящена изучению двойственной геометрии поверхности Картана V_m в проективном пространстве P_{2m}.

Материал п. 1 §1 носит реферативный характер; здесь даётся определение поверхности Картана V_m в P_{2m}, приводятся дифференциальные уравнения поверхности V_m и сопряжённой сети $\Sigma_m \subset V_m$ в P_{2m}; при $m > 2$ поверхность Картана V_m в P_{2m} является m-сопряжённой системой [15] и существует с произволом в $m(m-1)$ функций двух аргументов.

Показано, что с поверхностью Картана V_m в P_{2m} в третьей дифференциальной окрестности внутренним образом ассоциируется гиперполоса H_m, для которой данная поверхность Картана V_m является базисной (п. 2 §1). Такая гиперполоса названа *гиперполосой Картана* H_m, *ассоциированной с поверхностью* V_m *в* P_{2m}. Найдены дифференциальные уравнение гиперполосы Картана H_m в P_{2m} и условие её регулярности (теорема III.2).

В п. 3 §1 получен один из центральных результатов третьей главы (теорема III.3): *ассоциированная регулярная гиперполоса Картана* H_m *в* P_{2m} *в шестой дифференциальной окрестности индуцирует*: 1) *проективное пространство* $\overline{\mathrm{P}}_{2m}(H_m)$, *двойственное исходному пространству* $\mathrm{P}_{2m}(H_m)$ *относительно инволютивного преобразования* $J : \Omega^{\overline{K}}_{\overline{J}} \to \overline{\Omega}^{\overline{K}}_{\overline{J}}$ *структурных форм Пфаффа*; 2) *многообразие* $\overline{H}_m$ *в* $\overline{\mathrm{P}}_{2m}$, *двойственное исходному* H_m.

Следовательно, двойственность ассоциированной гиперполосы H_m в P_{2m} влечёт за собой двойственность геометрии исходной поверхности Картана V_m в P_{2m}, являющейся базисной для H_m.

В §2 рассматривается нормализация Нордена-Чакмазяна поверхности Картана V_m в P_{2m}. Доказано (теорема III.4), что нормализация одной из регулярных гиперполос Картана H_m в P_{2m} и $\overline{H}_m$ в $\overline{\mathrm{P}}_{2m}$ равносильна нормализации другой.

Показано (теорема III.5), что поверхность Картана V_m в P_{2m} в пятой дифференциальной окрестности внутренним образом порождает поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик Q^2_{2m-1}, причём в каждой точке $B_0 \in V_m$ касательная плоскость $\mathrm{T}_m(B_0)$ и характеристика $\Pi_{m-1}(B_0)$ полярно сопряжены относительно соответствующей локальной гиперквадрики. Условием соприкосновения третьего порядка гиперквадрик с поверхностью V_m является обращение в нуль тензора Дарбу D^{2m}_{iks}.

С помощью двойственного образа регулярной гиперполосы H_m в P_{2m} в пятой дифференциальной окрестности построены взаимные внутренние нормализации Фубини и Вильчинского поверхности Картана V_m в P_{2m} (теоремы III.6, III.7).

В §3 третьей главы рассматриваются двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ на нормализованной поверхности Картана V_m в P_{2m} и их приложения.

В п. 1 §3 доказано (теорема III.8), что *на поверхности Картана* V_m *в* P_{2m}, *нормализованной в смысле Нордена-Чакмазяна*, *индуцируются две аффинные связности* $\overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{2}{\nabla}$ *без кручения*, *двойственные относительно инволютивного преобразования* J *форм связности*. *Эти связности сопряжены* [12] *относительно поля симметричного тензора* M^{2m}_{ik}. *Связность* $\overset{0}{\nabla}$, *средняя по отношению к* $\overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{2}{\nabla}$, *является вейлевой с полем невырожденного тензора* M^{2m}_{ik}.

Получен (§ 3, п. 2) ряд результатов по изучению внутренней геометрии взаимной нормализации поверхности Картана V_m в P_{2m}:

1) показано (теорема III.9), что альтернированные тензоры Риччи $\overset{1}{r}_{[ks]}$ и $\overset{2}{r}_{[ks]}$ двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемых взаимной нормализацией поверхности Картана V_m в P_{2m}, совпадают; следовательно, геометрии этих связностей могут быть эквиаффинными лишь одновременно; условием их эквиаффинности является римановость средней связности $\overset{0}{\nabla}$;

2) доказано (теорема III.10), что геометрии двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемых нормализацией Фубини поверхности Картана V_m в P_{2m}, являются эквиаффинными, а их средняя геометрия – риманова;

3) доказано (теорема III.11), что если для взаимной нормализации в смысле Нордена-Чакмазяна поверхности Картана V_m в P_{2m} тензоры Риччи двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ совпадают $\left(\overset{1}{r}_{ks}=\overset{2}{r}_{ks}\right)$, то данная нормализация является нормализацией Вильчинского $\left\{\left(-\mathrm{W}_{2m}^{i}\right), \mathrm{W}_{i}^{0}\right\}$.

Показано (теорема III.12), что двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые на нормализованной в смысле Нордена-Чакмазяна поверхности Картана V_m в P_{2m}, совпадают тогда и только тогда, когда данная нормализация является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик и гиперквадрики этого поля с поверхностью V_m имеют соприкосновение третьего порядка; при этом связность $\overset{1}{\nabla} \equiv \overset{2}{\nabla} \equiv \overset{0}{\nabla}$ является римановой с полем метрического тензора M_{ik}^{2m}.

В п. 3 §3 найдены приложения двойственных аффинных связностей к изучению геометрии сопряжённой сети Σ_m на поверхности Картана V_m в проективном пространстве P_{2m}. Имеют место следующие утверждения:

а) поля гармонических плоскостей q_{2m}^{i} и q_{i}^{0} сопряжённой сети на поверхности Картана V_m в P_{2m} нормализуют поверхность V_m взаимно относительно поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик тогда и только тогда, когда данная сеть есть сеть Дарбу (теорема III.14);

б) сопряжённая сеть Σ_m на поверхности Картана V_m в P_{2m} есть сеть с совпавшими фокусами F_i^j (с совпавшими фокальными гиперплоскостями η_i^j) тогда и только тогда, когда относительно поля её гармонических плоскостей q_i^0 $\left(q_{2m}^{i}\right)$ она является геодезической сетью второго (первого) рода (теорема III.15);

в) поверхность Картана V_m в P_{2m}, на которой сопряжённая сеть Σ_m является чебышевской первого и второго родов (одновременно), имеет соприкосновение третьего порядка с соприкасающимися гиперквадриками поля тогда и только тогда, когда поля гармонических плоскостей $[\eta_i]$ и $[F_i]$ сети нормализуют поверхность V_m взаимно (теорема III.16);

г) если поверхность Картана V_2 в P_4 нормализована полями гармонических плоскостей сопряжённой сети Σ_2, то обе внутренние геометрии могут быть квазиевклидовыми лишь одновременно (теорема III.18);

д) если поверхность Картана V_m в P_{2m} $(m > 2)$, несущая сильно сопряжённую чебышевскую сеть первого и второго родов, нормализована полями гармонических плоскостей сети, то обе внутренние геометрии являются аффинными (локально) (теорема III.19).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Доказано, что с распределением Картана M в P_{2m} во второй дифференциальной окрестности инвариантным внутренним образом ассоциируется гиперполосное распределение H в P_{2m}, для которого исходное распределение M является базисным. Показано, что ассоциированное регулярное гиперполосное распределение Картана H в проективном пространстве P_{2m} индуцирует проективное пространство $\overline{P}_{2m}$, двойственное пространству P_{2m} и многообразие $\overline{\mathsf{H}}$ в $\overline{P}_{2m}$, двойственное исходному распределению H.

2. Доказано, что нормализация одного из регулярных гиперполосных распределений Картана H в P_{2m} и $\overline{\mathsf{H}}$ в $\overline{P}_{2m}$ равносильна нормализации другого. С использованием двойственного образа регулярного гиперполосного распределения H в P_{2m} в четвёртой дифференциальной окрестности внутренним инвариантным образом получен ряд двойственных [16] нормализаций [12] распределения Картана M в P_{2m} (нормализации Михэйлеску, Фубини, Вильчинского).

3. Показано, что на нормализованном распределении Картана M в проективном пространстве P_{2m} индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, найдены их приложения к изучению геометрии вполне сопряжённой ткани на распределении Картана M. Доказано, что на оснащённом в смысле Э. Картана распределении Картана M в P_{2m} индуцируются три линейные связности проективного типа, причём соответствующие пространства проективной связности $\overset{1}{P}_{2m,m}$ и $\overset{3}{P}_{2m,m}$ являются двойственными, найдено условие двойственности пространств $\overset{1}{P}_{2m,m}$ и $\overset{2}{P}_{2m,m}$. Получены инвариантные аналитические условия совпадения связностей пространств $\overset{1}{P}_{2m,m}$ и $\overset{2}{P}_{2m,m}$, $\overset{1}{P}_{2m,m}$ и $\overset{3}{P}_{2m,m}$. Показано, что на распределении Картана M в P_{2m}, оснащённом в смысле Нордена-Картана, в расслоении нормалей первого рода индуцируются пять нормальных связностей $\overset{\bar{a}}{\nabla}{}^{\perp}$; исследованы поля плоскостей на распределении Картана M, параллельные в этих нормальных связностях.

4. Доказано, что с поверхностью Картана V_m в проективном пространстве P_{2m} внутренним образом ассоциируется гиперполоса H_m, для которой данная поверхность Картана V_m является базисной. Показано, что ассоциированная регулярная гиперполоса Картана H_m в P_{2m} индуцирует проективное пространство $\overline{P}_{2m}(H_m)$, двойственное пространству $P_{2m}(H_m)$, и многообразие $\overline{H}_m$ в $\overline{P}_{2m}$, двойственное исходному H_m. Доказано, что нормализация одной из регулярных гиперполос Картана H_m в P_{2m} и $\overline{H}_m$ в $\overline{P}_{2m}$ равносильна нормализации другой. С помощью двойственного образа регулярной гиперполосы H_m в P_{2m} построены взаимные внутренние нормализации Фубини и Вильчинского по-

верхности Картана V_m в P_{2m}. Найдены двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые на нормализованной поверхности Картана V_m в P_{2m}. Найдены пути приложения полученных аффинных связностей к изучению двойственной геометрии сопряжённой сети $\Sigma_m \subset V_m$ в P_{2m}.

Список литературы

[1] Базылев В. Т. К геометрии плоских многомерных сетей / В. Т. Базылев // Уч. зап. Московского гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. – 1965. – № 243. – С. 29-37.

[2] Базылев В. Т. О многомерных сетях и их преобразованиях / В. Т. Базылев // Итоги науки и техники. Геометрия (1963) / ВИНИТИ АН СССР. – М., 1965. – С. 138-164.

[3] Базылев В. Т. О плоских сетях, присоединённых к поверхности Картана / В. Т. Базылев // Сибирский матем. журнал. – 1964. – Т. 5. – № 4. – С. 729-738.

[4] Близникас В. И. Дифференциальная геометрия неголономной гиперповерхности риманова пространства / В. И. Близникас // Liet. mat. rinkinys: Лит. мат. сб. – Вильнюс, 1971. – Т. 11. – № 1. – С. 63-74.

[5] Близникас В. И. О неголономной поверхности трёхмерного пространства проективной связности / В. И. Близникас // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1971. – Т. 3. – С. 115-124.

[6] Вагнер В. В. Теория составного многообразия / В. В. Вагнер // Труды семинара по векторному и тензорному анализу / МГУ. – Москва, 1950. – Вып. 8. – С. 11-72.

[7] Евтушик Л. Е. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. – М., 1979. – Т. 9. – 246 с.

[8] Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности / Э. Картан. – Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1962. – 210 с.

[9] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погружённых многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований / Г. Ф. Лаптев // Тр. Моск. матем. об-ва. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275-382.

[10] Лаптев Г. Ф. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I / Г. Ф. Лаптев, Н. М. Остиану // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1971. – Т. 3. – С. 49-94.

[11] Лумисте Ю. Г. Распределения на однородных пространствах / Ю. Г. Лумисте // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. – М., 1977. – Т. 8. – С. 5-24.

[12] Норден А. П. Пространства аффинной связности / А. П. Норден. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

[13] Остиану Н. М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве / Н. М. Остиану // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1973. – Т. 4. – С. 71-120.

[14] Остиану Н. М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II / Н. М. Остиану // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1971. – Т. 3. – С. 96-114.

[15] Смирнов Р. В. Преобразования Лапласа p-сопряжённых систем / Р. В. Смирнов // Доклады АН СССР. – 1950. – Т. 71. – № 3. – С. 437-439.

[16] Столяров А. В. Двойственная теория оснащённых многообразий: Монография. 2-е изд., доп. / А. В. Столяров. – Чебоксары: Чувашский госпедин-т, 1994. – 290 с.

[17] Столяров А. В. О внутренней геометрии поверхности Картана / А. В. Столяров // Диф. геометрия многообразий фигур. – Калининград: Калининградский ун-т, 1976. – Вып. 7. – С. 111-118.

[18] Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии / С. П. Фиников. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

[19] Cartan E. Les groups d'holonomie des espaces generalizes / E. Cartan // Acta math. – 1926, 48. – P. 1-42.

[20] Cartan E. Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidiene on non euclidiene / E. Cartan // Bull. Soc. Math. France. – 1919. – V. 47. – P. 125-160.

[21] Cartan E. Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidiene on non euclidiene / E. Cartan // Bull. Soc. Math. France. – 1920. – V. 48. – P. 132-208.

[22] Chern S. S. Laplace transforms of a class of higher dimensional varieties in a projective space of n dimensions. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1944, 30. – № 4. – P. 95-97.

[23] Ehresmann C. Les connexions infinitésimales dans un éspace fibré differentiable / C. Ehresmann // Collque de Topologie (Bruxelles, 1950). – Paris, 1951. – P. 29-55.

[24] Levi-Civita T. Nozioni di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvature Riemanniana / T. Levi-Civita // Rend. circ. Matem. – Palermo, 1917. – P. 173-205.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Кузьмина Н. А. Инвариантные оснащения распределения Картана / Н. А. Кузьмина // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы Пятой молодёжной науч. школы-конф. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2006. – Т. 34. – С. 140-142.

[2] Кузьмина Н. А. Распределение Картана / Н. А. Кузьмина // Современные вопросы геометрии и механики деформируемого твёрдого тела: тезисы регион. науч. конф. – Чебоксары: Чувашский госпедун-т, 2006. – С. 22-23.

[3] Кузьмина Н. А. Гиперполосное распределение, ассоциированное с распределением Картана / Н. А. Кузьмина // Математика. Образование: Материалы XV междунар. конф. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2007. – С. 241.

[4] Кузьмина Н. А. К двойственной геометрии распределения Картана / Н. А. Кузьмина // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2007. – № 1 (9) – С. 7-12.

[5] Кузьмина Н. А. Двойственные нормализации распределения Картана / Н. А. Кузьмина // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2007. – № 3 (55) – С. 43-48.

[6] Кузьмина Н. А. Двойственные проективные связности на оснащённом распределении Картана / Н. А. Кузьмина // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2007. – № 2 (10). – Т. 1. – С. 106-112.

[7] Кузьмина Н. А. Двойственная геометрия вполне сопряжённой ткани на распределении Картана / Н. А. Кузьмина // ВИНИТИ РАН. – М., 2007. – № 977 – В2007. – 18 с.

[8] Кузьмина Н. А. Приложение двойственных аффинных связностей к изучению геометрии вполне сопряжённой ткани на распределении Картана / Н. А. Кузьмина // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы Шестой молодёжной науч. школы-конф. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2007. – Т. 36. – С. 128-131.

[9] Кузьмина Н. А. Нормальные связности на оснащённом распределении Картана / Н. А. Кузьмина // ВИНИТИ РАН. – М., 2007. – № 1173 – В2007. – 13 с.

[10] Кузьмина Н. А. Проективно-дифференциальная геометрия распределения Картана / Н. А. Кузьмина // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2007. – Вып. 38. – С. 62-69.

[11] Кузьмина Н. А. Двойственная геометрия поверхности Картана / Н. А. Кузьмина // ВИНИТИ РАН. – М., 2008. – № 238 – В2008. – 35 с.

[12] Кузьмина Н. А. Двойственные аффинные связности на нормализованной поверхности Картана / Н. А. Кузьмина // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2008. – № 2 (58). – С. 23-30.

[13] Кузьмина Н. А. Приложение двойственных аффинных связностей к изучению геометрии сопряжённой сети на поверхности Картана / Н. А. Кузьмина // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2008. – № 1 (11). – Т. 1. – С. 11-16.

[14] Кузьмина Н. А. Двойственная геометрия распределения Картана / Н. А. Кузьмина // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 7. – С. 73-78.

Подписано к печати 27.04.09. Формат $60 \times 84/_{16}$.
Бумага ксероксная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ 265.

Отдел оперативной полиграфии
Чувашского государственного педагогического университета.
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.